Abzählbarkeit und Überabzählbarkeit: Kann unendlich mehr als unendlich sein?[1]

Rüdiger Grimm

Teil I

Ilmenau/Darmstadt, 29 Okt 2002, verbessert 26 Feb 2004

Unendlich mal der Höchste

Als Kinder spielten wir in Ahrensburg auf der Straße Verstecken, Fangen, Indianer oder Fußball. Manchmal gab es Streit darüber, was wir spielen sollten, und es gab das seltsame Gesetz, dass derjenige, der als erster „Gott Herr der Höchste" rief, bestimmen durfte, was gespielt wird. Eines Tages kam Dirk Braune auf die Idee, den Ruf „Gott Herr der Höchste" zu übertrumpfen mit dem Ruf „Gott Herr hundert Mal der Größte", und als das akzeptiert wurde, dauerte es nicht lange, bis andere „tausend Mal", „millionen Mal" u.s.w. einwarfen und damit, wenn auch nur für kurze Zeit, gewannen. Ein vorläufiges Ende des gegenseitigen Überbietens erreichte der Erfinder des Rufes „Gott Herr unendlich Mal der Größte". Aber eines Tages konnte selbst das noch überboten werden, und zwar mit der unvorstellbar gewaltigen Steigerung „Gott Herr unendlich hoch unendlich Mal der Höchste". Mehr ging nicht mehr.
Wieso eigentlich akzeptierten wir acht- oder zehnjährigen Kinder diese Zahlenvergleiche? Wieso fanden wir nicht bereits bei dem einfachsten „der Höchste" ein Ende, denn der deutsche Superlativ „höchste" ist per Definitionem und Sprachgefühl nicht zu überbieten. Noch ein zweites Mal überschritten wir eine Vergleichsgrenze. Denn zwar ist tausend größer als hundert, und Millionen größer als tausend, aber unendlich kann doch unmöglich noch gesteigert werden? Wir fanden aber ganz selbstverständlich, dass „unendlich hoch unendlich" noch viel mehr als bloß unendlich sei. Und dass wir das nicht noch weiter steigerten, lag nur daran, dass wir keine gewaltigere Rechenoperation kannten, wobei wir wahrscheinlich von dieser Exponentialoperation nur gehört hatten, ohne genau zu wissen, was sie bedeutet. Ich erinnere mich, dass mein Vater einmal sagte, zehn *mal* zehn sei zwar hundert, aber zehn *hoch* zehn sei bereits zehn Milliarden. Das überzeugte mich von der Allgewalt der „hoch"-Operation.
Aber wie ist es denn nun mit dem Vergleich des Unendlichen mit dem Unendlichen? Gibt es mehr als Unendlich?
Es gibt offenbar einen Unterschied zwischen der Un*endlich*keit von Mengen diskreter Objekte, die sich zum Abzählen anbieten, und der Un*begrenzt*heit geometrischer Ausdehnung. Eine Fläche von 1 qm Inhalt hat einen endlichen Flächeninhalt von Quadratmetern, ist in seiner Ausdehnung begrenzt, aber scheint doch unendlich viele Punkte zu besitzen. Wie viele eigentlich? Ein unendlich langer Streifen von einer endlichen Breite von 1 m ist in einer Richtung begrenzt, in anderer unbegrenzt und hat sowohl unendlich viele qm, als auch unendlich viele Punkte. Ein solches Band kann man schneckenförmig einrollen und ganz in einen begrenzten Raum von 1 m^3 einschließen. Umgekehrt hat die Oberfläche einer Kugel mit einem Radius von 1 m einen *endlichen* Flächeninhalt von 4π qm, ist aber unzweifelhaft *unbegrenzt* in allen Richtungen (weshalb unsere Vorfahren geglaubt haben mögen, die Erdoberfläche sei unendlich weit ausgedehnt). Einige Flächen haben also unendlich viele qm

---

[1] Spätere handschriftliche Anmerkungen vom 8.3.2004: 1. Hobbyarbeit einsamer Ilmenauer Nächte. 2. Das Ganze könnte etwas systematischer in Bezug auf Reihenfolge und Struktur sein!

und sind doch (teilweise) begrenzt, andere Flächen sind unbegrenzt und haben doch nur endlich viele qm.
Wir wollen uns hier auf diskrete Objekte beschränken, die sich zum Abzählen anbieten. Etwa die endlich vielen Äpfel auf einem Teller, oder die natürlichen Zahlen zwischen 0 und 10. Wir interessieren uns vor Allem für Mengen mit unendlich vielen Elementen. Dafür haben wir ein natürliches Vorbild: Die „natürlichen Zahlen” 0, 1, 2, 3, ... für die wir keine obere Grenze kennen. Die natürlichen Zahlen bestehen aus unendlich vielen Zahlen.
Wir werden fragen, ob diese unendlich vielen Zahlen überboten werden können durch noch mehr Zahlen, etwa durch die natürlichen Zahlen, zu denen noch die –1 hinzugenommen wird, oder durch die ganzen Zahlen, die die negativen Zahlen einschließen, oder durch die Punkte auf einer Geraden oder in einer Ebene Umgekehrt: können die unendlich vielen natürlichen Zahlen unterboten werden durch die Auswahl der geraden Zahlen oder der Primzahlen?

Gleichmächtigkeit, Abzählbarkeit und Überabzählbarkeit

Was heißt das, dass zwei Mengen gleich viele Elemente haben? Bei endlichen Mengen ist es einfach: wir zählen die Elemente ab und nennen zwei Mengen gleich groß oder gleich mächtig, wenn die Anzahlen dieselbe natürliche Zahl ergeben. Zwei gleich große endliche Mengen haben trivialer Weise die charakteristische Eigenschaft, dass sie durch eine „bijektive” Abbildung („injektiv”: ein-eindeutig, d.h. verschiedene Urbildelemente werden immer auf verschiedene Bildelemente abgebildet; „surjektiv”: jedes Element der Bildmenge wird erfasst) miteinander verknüpfbar sind. Wie aber steht es mit unendlichen Mengen?
Wir nehmen uns die endlichen Mengen zum Vorbild und definieren ganz allgemein: *Zwei Mengen sind gleich mächtig, wenn es eine bijektive Abbildung der beiden Mengen aufeinander gibt.*
Speziell nennen wir Mengen, die gleichmächtig zu der Menge der natürlichen Zahlen N={0,1,2,…} sind, *abzählbar*. Der Begriff ergibt sich daraus, dass eine 1:1-Abbidlung f:N→M einer Menge M einen Abzählalgorithmus aufdrückt, indem man als erstes Element von M $f(1)$, als zweites Element $f(2)$, u.s.w. als n-tes Element $f(n)$ wählt.
Eine spannende Frage ist, ob es unendliche Mengen gibt, die zwar eine abzählbare Teilmenge haben, selbst aber nicht abzählbar sind. Solche Mengen gibt es tatsächlich, sie heißen *überabzählbar*. Welche Mengen nun abzählbar und welche überabzählbar sind, und welche Arten der Überabzählbarkeit es gibt, das entzieht sich unserer unmittelbaren Vorstellungskraft und nimmt ganz überraschende Wendungen. Beispielsweise gibt es keine „kleinere” Unendlichkeit als die von N, hingegen sind sowohl die ganzen Zahlen Z, als auch die Brüche Q gleichmächtig zu N, also abzählbar. Die Potenzmenge P(N) aller Teimengen von N ist dagegen überabzählbar. Die Punkte einer Geraden R sind ebenfalls überabzählbar. R und P(N) sind gleichmächtig, hingegen ist unentscheidbar, ob es Mengen gibt, die mehr Elemente als N, aber weniger als R enthalten (Kontinuumshypothese). Hingegen sind die Ebene R^2, der euklidische Raum R^3 und alle R^n gleichmächtig zu der Zahlengerade, was unserer Intuition der Dimensionalität nicht leicht eingeht. So ist es denn auch erst die Stetigkeit, unter der der Dimensionsbegriff invariant ist, nicht die Anzahl der Punkte. R und R^2 sind zwar gleichmächtig, aber keineswegs topologisch äquivalent, d.h. es gibt zwar eine 1:1-Abbildung zwischen R und R^2, aber keine stetige.
All diese Sachverhalte werden wir im Folgenden beleuchten.

N als „kleinste” unendliche Menge

Zunächst machen wir uns klar, dass es keinesfalls kleinere unendliche Mengen als N geben kann. Das ergibt sich aus dem Satz, dass jede unendliche Teilmenge von N abzählbar ist, also gleichmächtig mit N selbst. Das liegt an der Wohlordnung von N. Jede Teilmenge von N hat ein kleinstes Element. Das wird als „erstes” Element gekennzeichnet. Von den verbleibenden Elementen ist wiederum eines das kleinste. Das wird als „zweites” Element gekennzeichnet. Und so fährt man fort ad infinitum. Dadurch ist eine bijektive Abbildung von N auf diese Teilmenge konstruiert.

Hilbert'sches Hotel

Wir beginnen nun die Suche nach überabzählbaren Mengen, das sind solche unendliche Mengen, die zwar eine abzählbare Teilmenge haben, selbst aber nicht abzählbar sind. Wir beginnen mit Mengen, die auf den ersten Blick den Verdacht erwecken, überabzählbar zu sein, in Wahrheit aber doch abzählbar sind. Das einfachste Beispiel hat David Hilbert mit seinem nach ihm benannten Hotel diskutiert. Er fragt, wird eine abzählbar unendliche Menge etwa dadurch größer, dass man ihr ein Element hinzufügt? Die Antwort lautet entgegen der Erfahrung mit endlichen Mengen: „nein”. Zwar wird jede endliche Menge dadurch größer, das man ihr weitere Elemente hinzufügt, für unendliche Mengen gilt das nicht unbedingt. Konkret gilt: N ist gleichmächtig zu $N \cup \{-1\}$, denn die Abbildung $f : n \mapsto n-1$ bildet offenbar N eins-zu-eins auf $N \cup \{-1\}$ ab. Die Umkehrabbildung von *f* ist $g : n \mapsto n+1$.

```
 0   1   2   3   4   5   6   7   ...
 ↓   ↓   ↓   ↓   ↓   ↓   ↓   ↓    ...
-1   0   1   2   3   4   5   6   7   ...
```

Abb. 1: Hilbert'sches Hotel

Diese Abbildung wird durch das „Hilbert'sche Hotel” illustriert: David Hilbert erläuterte seinen Studenten, dass eine abzählbar unendliche Menge gleich groß bleibt, wenn man ihr noch ein Element hinzufügt, indem er ihnen ein fiktives Hotel mit unendlich vielen Einzelbetten in den Zimmern mit den Nummern 1, 2, 3, ... usw. vor Augen führte, das voll belegt sei. Die Menge der Gäste ist dann offenbar genauso groß wie die Menge der Betten. Nun kommt in Hilberts Gleichnis in der Nacht ein weiterer Gast an. Wie ihn unterbringen, wo doch das Hotel belegt ist? Zum Glück hat das Hotel unendlich viele Betten, deshalb geht es: Der Wirt weckt den Gast in Zimmer 1 und bittet ihn, nach Zimmer 2 umzuziehen, dessen Gast nach Zimmer 3 umziehen soll, usw. Wenn alle Gäste gleichzeitig aufstehen und ein Zimmer aufrücken, findet jeder der alten Gäste wieder ein freies Bett, und der neu hinzugekommene Gast bekommt das frei gewordenen Bett in Zimmer 1. Alles geht wieder zur Ruhe und das Hotel ist wiederum voll belegt. Wiederum ist die Menge der Gäste genauso groß wie die Menge der Betten Offenbar ist nun unendlich plus eins genauso viel wie unendlich.

N ist gleichmächtig zu 2N (die Menge der geraden natürlichen Zahlen), denn $f : n \mapsto 2n$ liefert eine zugehörige bijektive Abbildung. Das Hilbertsche Hotel liefert auch dafür eine Illustration. Man könnte etwa in einem voll belegten Hotel mit unendlich vielen Betten leicht wiederum unendlich viele neu ankommende Gäste unterbringen, indem jeder schlafende Gast geweckt wird und in ein Zimmer umzieht, dessen Nummer doppelt so groß ist wie die Nummer des Zimmers, in dem er geschlafen hatte. Dann werden alle geradzahligen Zimmer besetzt, und die Zimmer mit den ungeraden Nummern 1, 3, 5, 7, ...usw. werden frei. In diese legen sich die unendlich neu hinzugekommenen Gäste, der n-te neue Gast in das Zimmer mit der Nummer $2n$-1.

Also sieht es so aus, als ob unendlich immer gleich unendlich sei. Haben wir Kinder uns denn geirrt, wenn wir glaubten, unendlich sei noch zu steigern? Nicht ganz. Unendlich ist zu steigern. Das sieht man, wenn man auf die Punkte einer geometrischen Linie oder einer geometrischen

Fläche oder eines geometrischen Raumes blickt. Die Punkte der Geraden (das „Kontinuum") bilden die reellen Zahlen. Wir werden sehen: es gibt mehr reelle Zahlen, als natürliche Zahlen. Die reellen Zahlen sind „überabzählbar". Allerdings müssen wir vorher noch die erstaunliche Tatsache begreifen, dass die Anzahl der rationalen Zahlen, also der Brüche, noch keineswegs überabzählbar ist, sondern nur genauso viele Elemente hat wie die natürlichen Zahlen. Die Brüche kann man in eine Reihenfolge bringen und abzählen, die reellen Zahlen de Kontinuums nicht mehr.
Zunächst einige allgemeine Überlegungen, bevor wir auf das Kontinuum zu sprechen kommen.

Die Abzählbarkeit der Vereinigung abzählbarer Mengen

Wenn M_1 und M_2 abzählbar sind, dann ist auch $M_1 \cup M_2$ abzählbar. Beweis: Man zählt die Elemente von M_1 und M_2 einfach abwechselnd ab und ignoriert dabei die Elemente aus $M_1 \cap M_2$ beim zweiten Mal.
Durch vollständige Induktion folgt, dass sogar für jedes $n \in \mathrm{N}$ $M_1 \cup M_2 \cup ... \cup M_n$ abzählbar ist, wenn jedes $M_1,... ,M_n$ abzählbar ist.

Die Abzählbarkeit von Z

Auf diese Weise erkennt man, dass $\mathrm{Z} = \mathrm{N} \cup -\mathrm{N}$ (wobei wir die 0 zu N hinzuzählen) abzählbar ist. Konkret zählt man Z zum Beispiel auf diese Weise ab: 0, -1, +1, -2, +2, -3, +3, u.s.w.

Die Abzählbarkeit des Produktes abzählbarer Mengen

Wenn M_1 und M_2 abzählbar sind, dann ist auch $M_1 \times M_2$ abzählbar. Beweis: Man betrachte die Teilmengen $K_n := \{(a_i, b_j) \in M_1 \times M_2 : i + j = n\} \subset M_1 \times M_2$, die offenbar ganz $M_1 \times M_2$ disjunkt überdecken. Man sieht das unmittelbar ein, wenn man sich die K_n ansieht: $K_0 = \{(a_0, b_0)\}$, $K_1 = \{(a_0, b_1), (a_1, b_0)\}$, $K_2 = \{(a_0, b_2), (a_1, b_1), (a_2, b_0)\}, ...$ u.s.w. Diese jeweils endlichen Mengen ($|K_n| = n + 1$) zählt man in aufsteigender Reihenfolge hintereinander ab: Erst das Element aus K_0, dann die Elemente aus K_1, dann die aus K_2 u.s.w. Auf diese Weise erschöpft man ganz $M_1 \times M_2$. Das ist exakt die Methode des Cantor'schen Diagonalverfahrens (s.u.).
Durch vollständige Induktion folgt, dass für jedes $n \in \mathrm{N}$ $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$ abzählbar ist, wenn jedes $M_1,... ,M_n$ abzählbar ist.

Die Abzählbarkeit von Q

Die rationalen Zahlen kann man als Teilmenge von $\mathrm{Z} \times (\mathrm{N} - \{0\})$ auffassen, indem man in den Zahlenpaaren die erste Komponente als Zähler und die zweite Komponente als Nenner interpretiert und alle durch Kürzung äquivalenten Zahlenpaare miteinander identifiziert. Mit Z und N-{0} ist auch ihr Produkt abzählbar, und damit auch die Teilmenge Q des Produktes. Cantor hat die Abzählbarkeit der rationalen Zahlen direkt mit seiner Diagonalmethode demonstriert:

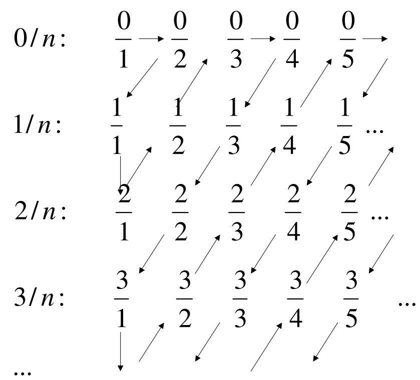

Abb. 2: Cantor'sches Diagonal-Abzählverfahren für rationale Zahlen (Brüche)

wobei diejenigen Brüche, die aufgrund eines kürzungsäquivalenten Bruches schon gezählt worden sind, weggelassen werden.

Die Abzählbarkeit algebraischer Zahlen

Eine reelle Zahl heißt <u>*algebraisch*</u>, wenn sie Nullstelle eines ganzzahligen Polynoms ist. Jede rationale Zahl (Bruch) *p/q* ist algebraisch, da sie Nullstelle des Polynoms *qx-p* ist, d.h. dieser Ausdruck wird Null, wenn man *x=p/q* einsetzt. Viele irrationale Zahlen wie $\sqrt{2}$ und, allgemein $\sqrt[n]{m}$, sind algebraisch, indem sie Nulsstellen zu x^2-2 bzw. x^n-*m* darstellen. Wir zeigen nun, dass die Menge der algebraischen Zahlen, die die rationalen Zahlen und noch viele irrationalen Zahlen umfasst, ebenfalls abzählbar ist:

Es sei $P(n) := \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n : \underset{0 \le i \le n}{\forall} a_i \in \mathrm{Z}\}$ die Menge der ganzzahligen Polynome vom Grade $\le n$. Offenbar sind $P(n) \cong \mathrm{Z}^{n+1}$ jeweils gleichmächtig, also ist jedes *P(n)* abzählbar (s.o.: mit Z ist auch Z^{n+1} abzählbar). Über das Cantor'sche Diagonalverfahren ist dann auch die Menge *aller* Polynome $\bigcup_{n \in \mathrm{N}} P(n)$ abzählbar:

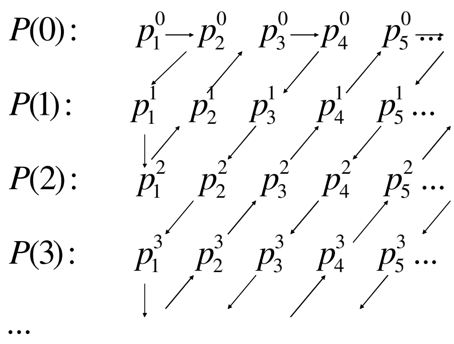

Abb. 3: Cantor'sches Diagonal-Abzählverfahren für Polynome

Da nun jedes ganzzahlige Polynom höchstens so viele Nullstellen hat, wie sein Grad angibt, kann man auch sämtliche Nullstellen aller Polynome abzählen, indem man erst die endlich vielen Nullstellen des ersten Polynoms, dann die endlich vielen Nullstellen des zweiten Polynoms, usw. abzählt und auf diese Weise alle Nullstellen aller Polynome ausschöpft.

Die Überabzählbarkeit des Kontinuums

Ist es denkbar, dass das Kontinuum der reellen Zahlen aus algebraischen Zahlen besteht? Wie kann man einsehen, dass das Kontinuum überabzählbar sein muss? Dazu gibt es mehrere Wege. *Erstens* kann man die reellen Zahlen als unendliche Dezimalbrüche auffassen und zeigen, dass diese sich nicht aufzählen lassen: Durch ein Diagonalverfahren über eine angenommene Aufzählung *aller* unendlichen Dezimalbrüche (an *i*-ter Stelle stünde der unendliche Dezimalbruch $r_i = a_{i,0}, a_{i,1}a_{i,2}a_{i,3}...a_{i,i}...$) definiert man einen unendlichen Dezimalbruch, der sich an der *i*-ten Dezimalstelle von der *i*-ten Dezimalstelle des *i*-ten Dezimalbruch in der angenommenen Aufzählung unterscheidet: $r = a_0, a_1a_2a_3...a_i...\ mit\ a_i = 0\ falls\ a_{i,i} \neq 0\ und\ a_i = 1\ falls\ a_{i,i} = 0$. Damit unterscheidet er sich von *jedem* Dezimalbruch in der Aufzählung an mindestens einer Stelle und wurde also nicht mit berücksichtigt, im Widerspruch zur Annahme, dass die angenommen Aufzählung *alle* Dezimalbrüche erschöpft.

Zweitens kann man dasselbe tun, indem man die Dezimalzahlen als unendliche duale Dezimalbrüche ansieht.

Drittens erkennt man, dass die reellen Zahlen gleichmächtig wie die Menge der dualen Folgen (unendliche Folgen aus 0 und 1) ist, indem man sie als unendliche duale Dezimalbrüche annimmt. Die dualen Folgen kann man eineindeutig auf die Potenzmenge der natürlichen Zahlen $P(\mathrm{N}) = \{M \subset \mathrm{N}\}$ abbilden, indem man eine Teilmenge von N auf diejenige duale Folge abbildet, deren *i*-tes Element genau dann eins ist, wenn *i* in der Teilmenge von N liegt, und sonst null: $f(M) = (a_1, a_2, a_3, ..., a_i, ...)$ mit $a_i = 1,\ wenn\ i \in M\ und\ a_i = 0,\ wenn\ i \notin M$.

Nun ist aber die Potenzmenge der natürlichen Zahlen bekanntermaßen überabzählbar. Man erkennt das, indem man das Russel'sche Paradox-Argument führt: Wäre *P*(N) abzählbar, dann gäbe es eine eineindeutige Abbildung $f : \mathrm{N} \leftrightarrow P(\mathrm{N})$. Aus einer solchen Abbildung konstruieren wir dann folgende Menge $M := \{n \in N : n \notin f(n)\}$. Dieser durch *f* und N wohldefinierten Menge *M* entspräche die natürliche Zahl $m := f^{-1}(M)$. Diese Zahl *m* erzeugt aber einen unlösbaren Widerspruch zu *M*, denn entweder es gilt $m \in M$, das hieße, da ja *M=f(m)*, dass $m \in f(m)$, und diese Eigenschaft schließt nach Definition der Menge *M* die Zahl *m* ja gerade davon aus, Element von *M* zu sein. Ist aber umgekehrt $m \notin M$, d.h. wegen *M=f(m)* also $m \notin f(m)$, dann erfüllt *m* nach Definition von *M* gerade die entscheidende Eigenschaft, die sie zu einem Element von *M* macht. Wie man es also dreht und wendet: wenn es eine solche eineindeutige Funktion $f : \mathrm{N} \leftrightarrow P(\mathrm{N})$ gäbe, dann gälte $m \in M \Leftrightarrow m \notin M$, und ein solcher Widerspruch schließt die Existenz von *f* aus.

Viertens schließlich kann man sogar demonstrieren, dass die Menge der algebraischen Zahlen „fast gar kein Gewicht" im Kontinuum hat: sie nehmen das Längenmaß 0 ein. Das geht so: Da die Menge der algebraischen Zahlen abzählbar ist, kann man die „Gesamtlänge" des Platzes, den sie im Kontinuum einnehmen, dadurch nach oben abschätzen, dass man die erste algebraische Zahl in der Abzählung in ein Intervall der Länge $\frac{1}{10}$ einbettet, die zweite Zahl in ein Intervall der Länge $\frac{1}{100}$, die dritte in ein Intervall der Länge $\frac{1}{1000}$ usw., die *i*-te Zahl also in ein Intervall der Länge $\frac{1}{10^i}$. Damit würde man alle algebraischen Zahlen vollständig einbetten in eine Vereinigung von Intervallen, die sich gegenseitig überschneiden. Die Vereinigung hätte daher eine Gesamtlänge von nicht mehr (sondern von weniger) als der

Summe der Teilintervalle. Die algebraischen Zahlen würden daher einen Platz von weniger als $0,1111... = \frac{1}{9}$ einnehmen. Das Kontinuum dagegen hat bekanntlich eine unendliche Länge. Schon das Intervall zwischen null und eins (Länge 1,0) wäre (mindestens) neunmal so lang wie sämtliche algebraischen Zahlen zusammen.
Man kann das Maß, das die algebraischen Zahlen (wie jede andere abzählbare Teilmenge der reellen Zahlen, also auch die Menge der rationalen Zahlen) im Kontinuum dadurch beliebig verkleinern, dass man sie der Reihenfolge nach einbettet in Intervalle der Größe $\frac{\varepsilon}{10^i}$, und ε kann dabei beliebig klein sein. Dadurch wird auch die Obergrenze des eingenommenen Platzes der abzählbaren Teilmenge auf $\frac{\varepsilon}{9}$ reduzierbar, d.h. beliebig klein. Das drückt man dadurch aus, dass man sagt, die Menge der algebraischen (rationalen, ganzen, natürlichen) Zahlen hat im Kontinuum das Maß null, während das Kontinuum selbstverständlich das Maß unendlich hat. Mit anderen Worten: Es gibt noch „viel viel" mehr transzendente (= nicht algebraische) Zahlen als algebraische. Jedes noch so kleine endliche Intervall des Kontinuums hätte „viel viel" mehr transzendente Zahlen als sämtliche algebraischen (rationalen, ganzen, natürlichen) Zahlen zusammen.
Die Frage ist nun: welches sind denn nun transzendente Zahlen? Die bekanntesten sind π und e. Aus diesen und den bekannten rationalen (Brüche) und algebraischen (Wurzeln) Zahlen kann man sehr viele weitere transzendente Zahlen bilden, denn „transzendent hoch algebraisch" ist immer eine transzendente Zahl.

Abzählbarkeit und Überabzählbarkeit: Kann unendlich mehr als unendlich sein?

Teil II

RG, 24 Juli 2003

Überabzählbare Zahlenmenge in R mit Maß Null

Wie wir oben gesehen haben, haben die algebraischen Zahlen in R das Maß Null, d.h. sie nehmen dort „praktisch keinen Raum" ein. Das liegt einfach daran, dass sie abzählbar sind. Der Beweis ist für jede andere abzählbare Teilmenge von R in gleicher Weise zu führen.
Jetzt fragt es sich umgekehrt, ob denn nun die überabzählbaren Teilmengen immer ein Maß *größer* als Null haben. Sie enthalten ja schließlich „viel viel mehr" Zahlen als jede abzählbare Teilmenge, und es läge der Schluss nahe, dass sie entsprechend „viel Platz einnähmen". Das wäre aber ein Trugschluss, denn tatsächlich gibt es überabzählbare Teilmengen in R, die in R das Maß Null haben. Es ist allerdings gar nicht so einfach, eine überabzählbare Teilmenge in R zu konstruieren, die das Maß Null hat, denn die meisten Teilmengen, die einem einfallen, haben ein endliches oder gar unendliches Maß größer als Null, so etwa alle Intervalle oder die transzendenten Zahlen.
Aber interessanter Weise hat die Teilmenge aller reellen Zahlen, deren Dezimalbruchentwicklung nur Nullen und Einsen enthält, diese merkwürdige Eigenschaft, dass sie überabzählbar ist und doch das Maß Null hat.
Wir beschränken uns für unser Argument auf diejenige Teilmenge davon, die im Intervall [0,1) liegt, also auf alle reellen Zahlen, deren Zahl vor dem Komma Null ist und deren Dezimalbruchentwicklung nur aus 0 und 1 besteht. Wir nennen diese Teilmenge $R(0,1) \subset [0,1)$:

$$R(0,1) := \{r \in [0,1) \subset R : r = 0,a_1a_2...a_i..\ mit\ a_i \in \{0,1\} \forall i \geq 1\}$$

Zunächst die *Überabzählbarkeit*: Diese Teilmenge ist offensichtlich gleichmächtig zur Menge aller dualen Folgen (unendlichen Folgen von 0 und 1), indem jede Dezimalbruchentwicklung, die nur aus 0 und 1 besteht, ja gerade eine solche Folge darstellt. Dass diese Menge überabzählbar ist, haben wir oben bereits festgestellt (mindestens zwei Argumente: erstens die Gleichmächtigkeit zur Potenzmenge der natürlichen Zahlen; zweitens der Widerspruchsbeweis mit der Diagonalkonstruktion wie bei den reellen Zahlen).
Nun die *Abschätzung des Maßes*. Wir decken nämlich diese Teilmenge *R(0,1)* in R nicht wie bei den abzählbaren Teilmengen von R mit je einem Intervall pro Zahl ab (das würde ja überabzählbar viele Intervalle liefern), sondern wir überdecken diese Teilmenge mit einer abzählbaren Menge von Intervallen, die jedes einzelne von ihnen gleich sehr viele (nämlich immer überabzählbar viele) Zahlen unserer Teilmenge enthält, und diese abzählbare Teilmenge von Intervallen machen wir beliebig klein. Das geht so:
Alle Zahlen von *R(0,1)* liegen offenbar in dem Teilintervall $[0,\frac{2}{10})$, denn jenseits dieses Intervalls in [0,1), also in $[\frac{2}{10},1)$, haben ja alle Zahlen als erste Dezimalziffer hinter dem Komma eine Zahl zwischen 2 und 9. Die gehören aber nicht zu *R(0,1)*. Wir haben nun in $[0,\frac{2}{10})$ zunächst alle Zahlen eingefangen, deren erste Dezimalziffer 0 oder 1 ist, deren andere Dezimalziffern aber noch beliebig zwischen 0 und 9 sind. Das Maß dieses Intervalls ist $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$. Wir wissen also schon mal, dass das Maß von *R(0,1) nicht größer* als $\frac{1}{5}$ ist.

Wir verfeinern jetzt unsere Überdeckung, indem wir alle Zahlen einfangen, deren *ersten beiden* Dezimalziffern 0 oder 1 sind. Diese liegen in den beiden Intervallen $[0,\frac{2}{100}) \cup [\frac{10}{100},\frac{12}{100})$, deren Maß offenbar $2 \cdot \frac{2}{100} = \frac{4}{100} = \frac{1}{25} = \left(\frac{1}{5}\right)^2$ ist. Bei der nächsten Verfeinerung überdecken wir genau die Zahlen, deren *ersten drei* Dezimalziffern 0 oder 1 sind. Diese liegen in den vier Intervallen $[0,\frac{2}{1000}) \cup [\frac{10}{1000},\frac{12}{1000}) \cup [\frac{100}{1000},\frac{102}{1000}) \cup [\frac{110}{1000},\frac{112}{1000})$, deren Maß $4 \cdot \frac{2}{1000} = \frac{8}{1000} = \frac{1}{125} = \left(\frac{1}{5}\right)^3$ ist.
Bei jeder weiteren Verfeinerung verdoppeln wir die Anzahl der Intervalle, deren Größe aber jeweils um den Faktor 10 verkleinert wird. Bei der n-ten Verfeinerung sind wir daher beim Maß $\left(\frac{1}{5}\right)^n$ angelangt. Da wir ja beliebig weit verfeinern können, finden wir zu jedem beliebig hohen n eine vollständige Überdeckung von *R(0,1)*, d.h. wir können das Maß der Überdeckung auf jedes beliebige $\left(\frac{1}{5}\right)^n$ drücken. Bekanntlich konvergiert diese Folge gegen Null, d.h. wir können das Maß beliebig klein machen. Also hat *R(0,1)* in *R* das Maß Null.
Damit ist unsere Behauptung bewiesen.
Bekanntlich wird ein etwas anschaulicheres Beispiel als überabzählbare Teilmenge von *R* mit Maß Null gewählt: Man wählt aus dem Intervall [0,1) das erste und letzte Drittel aus. In jedem der beiden Teilintervalle wählt man wiederum jeweils das erste und letzte Drittel aus, usw. Das Resultat ist wiederum eine Teilmenge von [0,1), die überabzählbar ist, aber das Maß Null hat. Man macht sich leicht klar, dass dieses Beispiel gerade diejenigen Zahlen zwischen 0 und 1 liefert, in deren triadischer Bruchzerlegung nur 0 und 2 vorkommen (nicht die 1). Die sind offenbar überabzählbar, und bei der sukzessiven Überdeckung erreicht man jeweils das Maß $\left(\frac{2}{3}\right)^n$. Diese Folge konvergiert ebenfalls gegen Null.
Damit gibt es zu jeder nicht negativen reellen Zahl *r* Beispiele für überabzählbare Teilmengen von *R*, deren Maß gerade *r* ist. Für *r*=0 haben wir oben zwei Beispiele geliefert. Für jede positive reelle Zahl hat das Intervall [0,*r*] gerade das Maß *r*. Und selbstverständlich gibt es auch Teilmengen mit dem Maß unendlich, nämlich zum Beispiel das Intervall [0,∞), oder ganz *R*, oder auch die transzendenten Zahlen. Allerdings wissen wir, dass jede Teilmenge, die ein Maß *größer* als Null hat, notwendigerweise *überabzählbar* sein muss. *Umgekehrt aber muss nicht jede überabzählbare Teilmenge ein Maß größer als Null haben.*

Abzählbarkeit und Überabzählbarkeit: Kann unendlich mehr als unendlich sein?

Teil III

RG, 4 Jan 2004

Gleichmächtigkeit der Ebene mit dem Zahlenstrahl

Auf den ersten Blick scheint es so, dass die euklidische Ebene RxR mehr Elemente haben müsste, als der Zahlenstrahl R, dass also gewissermaßen „überabzählbar mal überabzählbar" mehr ergeben müsste, als „einfach überabzählbar". Aber schon im Falle von ZxZ hatten wir gesehen, dass das Cantor'sche Diagonal-Abzählverfahren eine Bijektion zwischen Z und ZxZ herstellt, was in gleicher Weise die (etwas überraschende) Gleichmächtigkeit der Brüche Q=Zx(N-{0} mit den ganzen Zahlen Z beweist. Tatsächlich gilt das auch für die Ebene und den Zahlenstrahl: sie sind gleichmächtig.

Zum Beweis wird eine Bijektion φ:RxR→R gesucht. Ein naheliegender Kandidat ist diejenige Abbildung, die die Dezimaldarstellungen der beiden Komponenten $(x,y)\in$RxR ineinander mischt (wie zwei Kartenstapel in eines gemischt werden, engl. „shuffle"). Wir diskutieren diese Abbildung ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit für Komponenten zwischen 0 und 1, also die Shuffle-Abbildung φ:[0,1]x[0,1]→[0,1].

$$\varphi(x,y) := \varphi(0.x_1x_2x_3\ldots , 0.y_1y_2y_3\ldots) = 0.x_1y_1x_2y_2x_3y_3\ldots$$

Die zugehörige Umkehrabbildung würde die Dezimaldarstellung einer reellen Zahl entsprechend „entflechten":

$$\psi(0.x_1x_2x_3x_4x_5x_6\ldots) := (0.x_1x_3x_5\ldots , 0.x_2x_4x_6\ldots)$$

Das ist die Grundidee der Bijektion, allerdings hat sie einen kleinen, unangenehmen Haken: die in Dezimalfolgen möglichen 9er Perioden machen die Darstellung einer Dezimalfolge für eine reelle Zahl uneindeutig. Beispielsweise stellen die Zahlen 0.1 und 0.0999… (unendliche Folge von 9en) dieselbe Zahl dar! Für die Abbildungen φ und ψ müsste man sich also vorab entscheiden, welche der beiden äquivalenten Dezimalfolgen man für den Abbildungsalgorithmus wählt. Naheliegenderweise wählt man dann grundsätzlich Dezimaldarstellungen ohne 9er-Perioden, d.h. ein Urbild $0.x_1x_2\ldots x_i999\ldots$würde so abgebildet werden, als wenn es die Darstellung $0.x_1x_2\ldots(x_i+1)000\ldots$ hätte, d.h. für dieses Beispiel etwa würde gelten

$$\varphi(0.x_1x_2\ldots x_i999\ldots , 0.y_1y_2\ldots y_iy_{i+1}y_{i+2}\ldots) = 0.x_1y_1x_2y_2\ldots(x_i+1)\ y_i0y_{i+1}0y_{i+2}0\ldots$$
(und nicht etwa = $0.x_1y_1x_2y_2\ldots x_iy_i9y_{i+1}9y_{i+2}9...$!)

Ein noch konkreteres Beispiel bildet

$$\varphi(0.0999\ldots , 0.1) = 0.11 \text{ (und nicht etwa 0.01909090... !)}$$

Damit ist die Abbildung φ zwar ordentlich definiert, und sogar offenbar injektiv, wie die Umkehrabbildung ψ zeigt, aber leider nicht mehr surjektiv! Denn reelle Zahlen, deren Dezimaldarstellungen regelmäßig alle 2 Stellen eine 9 enthalten, tauchen im Bild von φ nicht mehr auf, d.h. die Umkehrabbildung ist nicht mehr auf ganz R definiert, sondern nur noch auf φ(R)⊂R (φ(R)≠R).

Bis hierher ist nun erwiesen, dass RxR injektiv in R eingebettet werden kann. Das ist schon erstaunlich genug, und zur positiven Beantwortung unserer Frage nach der Gleichmächtigkeit von R und RxR reicht das eigentlich auch. Denn die Kardinalität von RxR ist damit „kleiner-gleich” der Kardinalität von R. Und da R umgekehrt injektiv in R eingebettet werden kann, etwa durch die Inklusion auf die erste Komponenten Rx{0}⊂RxR, ist auch umgekehrt die Kardinalität von R „kleiner-gleich” der Kardinalität von RxR. Damit gilt insgesamt

$$\text{card}(RxR) \leq \text{card}(R) \leq \text{card}(RxR) \text{ und also } \text{card}(RxR) = \text{card}(R)$$

Und dennoch bleibt ein Stachel zurück. Die Gleichmächtigkeit zweier Mengen kann man zwar widerspruchsfrei dadurch definieren, dass es wechselseitige Injektionen der beiden Mengen ineinander gibt. Aber klarer ist doch die Definition der Gleichmächtigkeit zweier Mengen, dass sie durch eine Bijektion miteinander verbunden sind. Es stellt sich nun die Frage, ob das nicht auf dasselbe hinausläuft. Impliziert nicht die Existenz zweier wechselseitiger Injektionen die Existenz einer Bijektion? Das ist in der Tat der Fall, aber nicht trivial.

Bijektionen und Injektionen

Die so einfach klingende Tatsache, dass zwei Mengen *A* und *B*, die wechselseitig durch Injektionen ineinander abbildbar sind, bijektiv miteinander verbunden sind, ist nicht trivial. Dennoch kann man diesen Satz Schritt für Schritt konstruktiv beweisen.

Äquivalenzsatz[2]: Es seien *A* und *B* zwei Mengen. Wenn es je eine Injektion $f: A \to B$ und $g: B \to A$ gibt, dann gibt es auch eine Bijektion $\varphi: A \leftrightarrow B$.

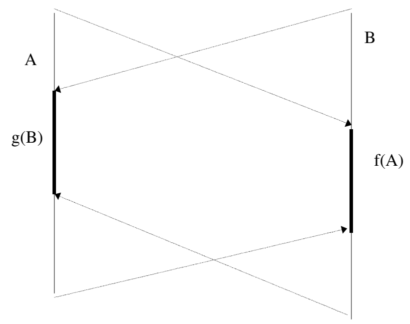

Abb. 4: Darstellung zweier Injektionen $f: A \to B$ und $g: B \to A$.

Beweis:

Eingeschränkt auf ihre Bilder handelt es sich um Bijektionen $f: A \leftrightarrow \text{Im}(f)$ und $g: B \leftrightarrow \text{Im}(B)$, wobei im Allgemeinen $\text{Im}(f) \neq B$ sowie $\text{Im}(g) \neq A$ zugelassen sind, es kann sich also um *echte* Inklusionen handeln, deren Bilder *echte* Teilmengen ihrer Zielmengen bilden. Jetzt ist die Frage, wie man aus *f* und *g* eine Bijektion $\varphi: A \leftrightarrow B$ zwischen den *ganzen* Mengen *A* und *B* konstruieren kann. Ausgehend von *A* kommen nur *f* und g^{-1} in Frage. *f* hat den Vorteil, dass es

---

[2] Der Äquivalenzsatz wurde von den Mathematikern Cantor, Bernstein und Schröder, mit Beiträgen von Dedekind, erarbeitet und ist nach diesen benannt. Ein sehr schöner Beweis (der besser und anschaulicher als mein Beweis oben ist, den ich aber vorher nicht kannte) findet sich bei Wikipedia unter „Satz von Cantor-Bernstein-Schröder“, https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Cantor-Bernstein-Schröder, gelesen am 24.3.2021

auf jedes $x \in A$ angewendet werden kann, dafür erreicht f leider nicht ganz B. Umgekehrt erreicht zwar g^{-1} ganz B, dafür ist es nicht auf jedes $x \in A$ anwendbar.

Die Beweisidee besteht nun darin, g^{-1} auf möglichst viele $x \in A$ anzuwenden, um möglichst viel (sogar alles) in B zu erreichen. Dagegen wird f nur dann angewendet, wenn g^{-1} nicht angewendet werden kann (etwa weil $x \notin \mathrm{Im}(g)$) oder wenn die Anwendung von g^{-1} zu einem Injektivitätswiderspruch führt, d.h. wenn g^{-1} auf ein Bildelement abgebildet wird, auf das f bereits ein anderes x' abbildet (etwa wenn $g^{-1}x \in \mathrm{Im}(f)$).

Im Einzelnen betrachten wir nun Schritt für Schritt alle Möglichkeiten, die ein Element $x \in A$ bietet. Für die einen x wird f angewendet, für die anderen g^{-1}, allerdings dürfen nicht verschiedene x und x' auf dasselbe Bild geworfen werden: $fx = g^{-1}x'$ muss immer vermieden werden.

1. Wenn $x \notin \mathrm{Im}(g)$ liegt, dann kommt g^{-1} nicht in Frage, in diesem Fall wird f angewendet.
2. Wenn $x \in \mathrm{Im}(g)$ liegt, dann kommt g^{-1} in Frage, allerdings darf $g^{-1}x$ nicht bereits auf ein anderes Bild von fx' treffen, da sonst $g^{-1}x = fx'$ die Injektivität der Bijektion verletzen würde. Wenn also gilt, dass $x \in \mathrm{Im}(g)$ und $g^{-1}x \notin \mathrm{Im}(f)$ liegt, dann wird g^{-1} angewendet.
3. Wenn $x \in \mathrm{Im}(g)$ *und* $g^{-1}x \in \mathrm{Im}(f)$, dann muss erst geprüft werden, ob bei (eigentlich erwünschter) Anwendung von $g^{-1}x$ ein Injektivitätskonflikt mit einem anderen fx' besteht. Die Frage ist also, ob das in Frage kommende x' überhaupt mit f behandelt wird oder nicht seinerseits mit g^{-1}, was erstens sowieso erwünscht ist und zweitens den Injektivitätskonflikt wieder lösen würde. Auf x' braucht f nur dann zwingend angewendet zu werden, wenn g^{-1} auf x' gar nicht angewendet werden *kann*, z.B. weil $x' \notin \mathrm{Im}(g)$. In dem Fall *muss* f auf x' angewendet werden und auf x kann dann kein g^{-1} mehr angewendet werden, sondern auf x muss ebenfalls f angewendet werden. Formal: wenn $x \in \mathrm{Im}(g)$ *und* $g^{-1}x \in \mathrm{Im}(f)$ *und* $f^{-1}g^{-1}x \notin \mathrm{Im}(g)$, dann wird fx angewendet.
4. Wenn $x \in \mathrm{Im}(g)$ *und* $g^{-1}x \in \mathrm{Im}(f)$ *und* $f^{-1}g^{-1}x \in \mathrm{Im}(g)$, dann ist g^{-1} wieder ein Kandidat, allerdings nur, wenn, indem g^{-1} auf $f^{-1}g^{-1}x$ angewendet wird, kein Injektivitätskonflikt mit einem anderen $x'' \in A$ besteht, auf das f anzuwenden wäre (so dass $g^{-1}f^{-1}g^{-1}x = fx''$ entstünde), zum Beispiel wenn $g^{-1}f^{-1}g^{-1}x$ gar nicht in $\mathrm{Im}(f)$ liegt, u.s.w.

Diese Argumentationskette muss man *ad infinitum* fortsetzen, um einerseits alle Elemente von B zu erreichen (daher so oft wie möglich g^{-1}) und andererseits in keinen Injektiviätskonflikt mit f zu geraten (in dem Fall ausweichen auf f). Die allgemeine Abbildungsregel von φ lautet nun wie folgt:

1. $\varphi(x) := f(x)$
- *wenn* $x \notin \mathrm{Im}(g)$
- *oder wenn* $x \in \mathrm{Im}(g)$ *und* $g^{-1}x \in \mathrm{Im}(f)$ *und* $f^{-1}g^{-1}x \notin \mathrm{Im}(g)$
- …
- *oder wenn* $x \in \mathrm{Im}(g)$ *und* $g^{-1}x \in \mathrm{Im}(f)$ *und* $f^{-1}g^{-1}x \in \mathrm{Im}(g)$ *und* …
  für ein n>0 $g^{-1}(f^{-1}g^{-1})^n x \in \mathrm{Im}(f)$ *und* $(f^{-1}g^{-1})^n x \notin \mathrm{Im}(g)$

2. $\varphi(x) := g^{-1}(x)$
- *wenn* $x \in \mathrm{Im}(g)$ *und* $g^{-1}x \notin \mathrm{Im}(f)$
- *oder wenn* $x \in \mathrm{Im}(g)$ *und* $g^{-1}x \in \mathrm{Im}(f)$ *und* $f^{-1}g^{-1}x \in \mathrm{Im}(g)$ *und* $g^{-1}f^{-1}g^{-1}x \notin \mathrm{Im}(f)$
- …
- *oder wenn* $x \in \mathrm{Im}(g)$ *und* $g^{-1}x \in \mathrm{Im}(f)$ *und* …..
  für ein n>0 $(f^{-1}g^{-1})^n x \in \mathrm{Im}(g)$ *und* $g^{-1}(f^{-1}g^{-1})^n x \notin \mathrm{Im}(f)$

3. $\varphi(x) := f(x)$ (hier könnte man genauso gut auch $g^{-1}(x)$ wählen),
- *wenn* für alle n ≥ 0 gilt: $(f^{-1}g^{-1})^n x \in \mathrm{Im}(g)$ *und* $g^{-1}(f^{-1}g^{-1})^n x \in \mathrm{Im}(f)$

Die *Injektivität* von φ ergibt sich daraus, dass $\varphi(x)=\varphi(x')$ nur dann gelten kann, wenn beide, x und x', in der gleichen Situation 1. oder 2. oder 3. liegen können. Andernfalls nämlich gälte etwa für x Situation 1. und für x' Situation 2, d.h. einerseits $fx=g^{-1}x'$ (wegen $\varphi(x)=\varphi(x')$), andererseits ergeben sich für x und x' folgende Bedingungen aus 1. bzw. 2.:

1.: $x\in \mathrm{Im}(g)$ *und* für ein n>0: $g^{-1}(f^{-1}g^{-1})^n x\in \mathrm{Im}(f)$ *und* $(f^{-1}g^{-1})^n x\notin \mathrm{Im}(g)$;

2.: $x'\in \mathrm{Im}(g)$ und $g^{-1}x'\in \mathrm{Im}(f)$ *und* für ein n>0 $(f^{-1}g^{-1})^n x'\in \mathrm{Im}(g)$ *und* $g^{-1}(f^{-1}g^{-1})^n x'\notin \mathrm{Im}(f)$.

Aus der Gleichheit $fx=g^{-1}x'$ wird dann aus der Bedingung 2. für x' eine zur Bedingung 1. von x widersprüchliche Bedingung für x, nämlich:

… für ein n>0 $(f^{-1}g^{-1})^n x' = (f^{-1}g^{-1})^{n-1} f^{-1}g^{-1}x' = (f^{-1}g^{-1})^{n-1} f^{-1}fx = (f^{-1}g^{-1})^{n-1}x \in \mathrm{Im}(g)$ *und*
$g^{-1}(f^{-1}g^{-1})^n x' = g^{-1}(f^{-1}g^{-1})^{n-1} f^{-1}g^{-1}x' = g^{-1}(f^{-1}g^{-1})^{n-1}f^{-1}fx = g^{-1}(f^{-1}g^{-1})^{n-1}x\notin \mathrm{Im}(f)$!

Also können nicht x in Situation 1. *und* x' in Situation 2. sein. Mit einem analogen Argument verbieten sich die Zugehörigkeit von x zu Situation 1. und x' zu Situation 3., bzw. x zu Situation 2. und x' zu Situation 3. Also können x und x' nur gemeinsam Bedingungen 1., 2. oder 3. erfüllen. In diesem Fall erbt φ aber die Injektivität von f bzw. von g^{-1}.

Die *Surjektivität* ergibt sich unmittelbar aus der Umkehrabbildung $\psi: B\rightarrow A$, die analog zu φ gebildet wird. Man stellt fest, dass jedes Element $y\in B$ einer analogen Situation 1., 2. oder 3. zugeordnet werden kann. In Abhängigkeit davon wählt man das Urbild $f^{-1}y$ bzw. gy, das von φ genau auf y abgebildet wird. Q.E.D.

Als Beispiel für die hier konstruierten Bijektionen kann man die oben dargestellten Injektionen von RxR und R betrachten. Ob eine reelle Zahl x „entflechtet" in die Ebene gehoben wird oder einfach nur in die erste Komponente $(x, 0)$ eingebettet werden kann, hängt davon ab, ob (und welcher Art) ihre Dezimalentwicklung regelmäßige Muster aus Nullen oder Neunen hat. Zum Beispiel hätte die Zahl 0.121919… (ab einer bestimmten Stelle ist jede zweite Stelle eine 9) kein geeignetes Urbild-Tupel (da dieses ja (0.111…, 0.2999…) sein müsste, die zweite Komponente wird aber als Normalform 0.3000… abgebildet, d.h. das Ergebnis wäre 0.1310101010… Daher kann 0.12191919… nur in die erste Komponente inkludiert werden, also auf (0.12191919…, 0.0000…) abgebildet.

Eine Zahl dagegen, die keinerlei regelmäßiges 0- oder 9-Muster aufweist, kann gefahrlos in seine zwei Dezimalformen „entflechtet" werden, z.B. die Zahl 0.12121212… auf das Tupel (0.111…, 0.222…).

Ein anderes anschauliches Beispiel liefern die Injektionen Z→2Z durch $f(n)=2n$ und umgekehrt Z→3Z durch $g(n)=3n$. Aus diesen beiden Injektionen kann man die Bijektion φ:Z↔Z konstruieren, die wie folgt abbildet:

Jede nicht durch 3 teilbare Zahl n wird als $f(n)=2n$ verdoppelt. Jede durch 3 teilbare Zahl wird entweder als $g^{-1}(n)=n/3$ durch 3 geteilt, oder doch wieder als $f(n)=2n$ verdoppelt, je nachdem, ob die Kette der Teilungen bei einer Teilung durch 3 oder bei einer Teilung durch 2 abbricht:

Die nicht durch 3 teilbaren Zahlen werden alle verdoppelt, also werden 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, ... auf 2, 4, 8, 10, 14, 16, 20, 22, 26, 28, 32, 34, ... abgebildet. Interessant sind die durch 3 teilbaren Zahlen, die nach und nach die Lücken auffüllen müssen:

- $\varphi(3)=1$, denn 3 durch 3 teilbar, 1 ist aber nicht gerade; Achtung, hier wird das Bild 6 ausgelassen, das wird erst durch $\varphi(18)=18/3=6$ erreicht werden;
- $\varphi(6)=12$, denn 6 ist durch 3 teilbar, 6/3=2 ist gerade, aber 2 nicht durch 3 teilbar;
- $\varphi(9)=3$, denn 9 ist durch 3 teilbar und 3 ungerade; 18 wird erst von $\varphi(54)$ erreicht werden;
- $\varphi(12)=24$, denn 12 ist zwar durch 3 teilbar, aber 12/3=4 ist gerade, während 4/2 nicht durch 3 teilbar ist;
- $\varphi(15)=5$, denn 15 durch 3 teilbar, 15/3=5 ist ungerade;
- $\varphi(18)=6$, denn 18 durch 3 teilbar, 18/3=6 gerade, 6/2=3 durch 3 teilbar, 3/3=1 ungerade; usw.

Bis 18 wurden im Bild bereits 1, 2, 3, 4, 5, 6 vollständig erreicht, sowie die weiteren geraden Zahlen 8, 10, 12, 14, 16, (nicht 18), 20, 22, 24, 26, 28, (nicht 30), 32, 34, (nicht 36). Bei weiterem Voranschreiten würde φ nacheinander die Lücken von unten auffüllen und ansonsten weiter nach oben die geraden Zahlen bedienen. So erreicht φ schließlich surjektiv ganz Z.

Intervalle und R

Frage: Haben Intervalle eine kleinere Mächtigkeit als ganz R? Offenbar sind offene Intervalle bijektiv (ja sogar topologisch) aufeinander abbildbar, und mithin gleichmächtig untereinander und zu R. Eine Bijektion $(a,b)\leftrightarrow(c,d)$ ist zum Beispiel $((x\text{-}a)\cdot d\text{-}(x\text{-}b)\cdot c)/(b\text{-}a)$. Eine Bijektion zwischen $(-\pi/2,\pi/2)\leftrightarrow$R ist zum Beispiel $\tan(x)$. (Wer transzendente Funktionen nicht mag, wählt statt dessen $x/(1-x^2)$ als Bijektion zwischen $(-1,+1)\leftrightarrow$R.) Eine Bijektion zwischen R und $(0,\infty)$ ist zum Beispiel exp(x). Aus Kompositionen dieser drei Bijektionstypen kann man Bijektionen zwischen allen offenen Intervallen in R herstellen.

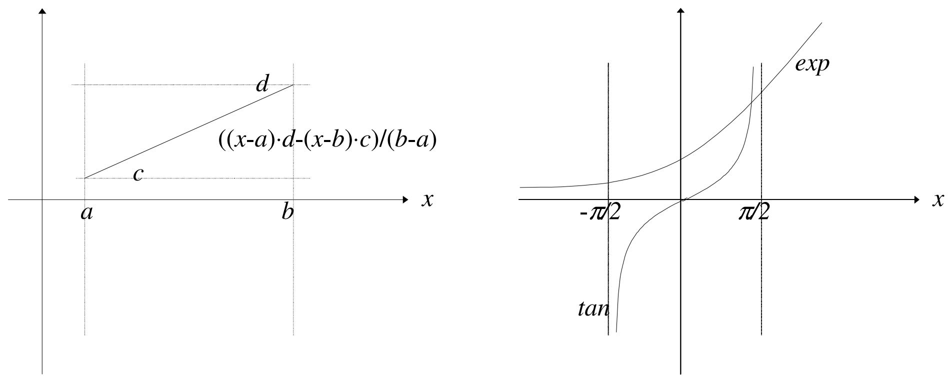

Abb. 5: topologische 1:1 Abbildungen $(a,b)\leftrightarrow(c,d)$; tan: $(-\pi/2,\pi/2)\leftrightarrow$R, und exp(x): R$\leftrightarrow(0,\infty)$

Etwas weniger offensichtlich sind die Bijektionen von geschlossenen, halb geschlossenen und offenen Intervallen aufeinander. Diese sind auch keinesfalls topologisch herzustellen, da bekanntlich unter stetigen Abbildungen die Urbilder offener Mengen offen sind. Das ist ja hier nicht der Fall. Für mengentheoretische Bijektionen ist Stetigkeit aber auch gar nicht gefragt. Hier geht man anders vor:

(0,1] wird bijektiv derart auf (0,1) abgebildet, dass zunächst 1 auf ½ abgebildet wird, dann ½ auf 1/3, 1/3 auf ¼, usw. für alle n: 1/n auf 1/(n+1) abgebildet wird (eine Variante des Hilbert'schen Modells, s.o.). Es bleiben in beiden Intervallen dieselben abzählbar vielen disjunkten offenen Intervalle übrig, nämlich (1/2,1), (1/3,1/2), (1/4,1/3), usw. … (1/(n+1),1/n), … die identisch aufeinander abgebildet werden.

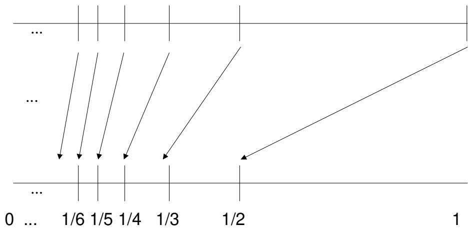

Abb. 6: Mengentheoretische Bijektion (0,1]↔(0,1)

Mit [0,1] und (0,1) geht es im Prinzip genauso: Zunächst die diskreten Elemente 1 auf ½, 1 auf 1/3, dann ½ auf ¼, 1/3 auf 1/5 usw. für alle n: 1/n auf 1/(n+2). Es bleiben wiederum dieselben offenen Teilintervalle übrig, die identisch aufeinander abgebildet werden.

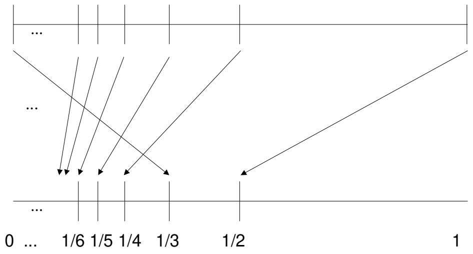

Abb. 7: Mengentheoretische Bijektion [0,1]↔(0,1)

Fazit

Alle Intervalle, Vereinigungen von Intervallen und R selbst sind untereinander bijektiv. Ebenfalls gilt: R und RxR sind bijektiv und daher mengentheoretisch „gleich groß". Von derselben Größe (Mächtigkeit) sind alle n-dimensionalen euklidischen Räume: R, R^2, R^3, R^4, R^5, …

Der nächste Kardinalitätssprung wird erst wieder erreicht bei R^R, das ist die Menge aller mengentheoretischen Funktionen R→R. Es gilt card(R^R) > card(R).

Corollar (einfache Folgerung) aus der Gleichmächtigkeit von RxR↔R (Shuffle-Mix, s.o.) bzw. NxN↔N (Diagonalabzählverfahren, s.o.) ist übrigens die Gleichmächtigkeit von $R^R \leftrightarrow P(R)$ bzw. $N^N \leftrightarrow P(N)$. Es gelten nämlich beide Inklusionen $R^R \subset P(R) \subset R^R$, und wegen des Äquivalenzsatzes oben deshalb die Gleichmächtigkeit. Zunächst die intuitiv weniger einleuchtende Inklusion $R^R \subset P(R)$: Alle mengentheoretischen Funktion f:R→R sind nämlich eins-zu-eins abbildbar auf Graphen g⊂RxR. Über die Bijektion RxR↔R wird dann jede Funktion f auf einen Graphen g, und der auf eine Teilmenge $\varphi(g) \subset \varphi(RxR)=R$ abgebildet. Diese Abbildung ist injektiv, allerdings nicht surjektiv (nicht alle Teilmengen von RxR sind Graphen!). Nun die intuitiv sofort nachvollziehbare umgekehrte Inklusion: $P(R) \leftrightarrow \{0,1\}^R \subset R^R$.

Daher gilt: $R^R \leftrightarrow P(R) \leftrightarrow \{0,1\}^R$ = Menge der „charakteristischen Funktionen” von R, die gerade der ausgewählten Teilmenge 1 zuordnen, und ihrem Komplement 0. Ebenso argumentiert man für $N^N \leftrightarrow P(N) \leftrightarrow \{0,1\}^N$ = Menge der charakteristischen Funktionen von N, die gerade der ausgewählten Teilmenge 1 zuordnen, und ihrem Komplement 0 = Menge der unendlichen dualen Folgen aus 0 und 1.

Anmerkung, von mir später (2005?) handschriftlich hinzugefügt:

Der Äquivalenzsatz erleichtert einem oft den Nachweis der Gleichmächtigkeit zweier Mengen $A \leftrightarrow B$, indem es genügt, Inklusionen/Injektionen $A \rightarrow B \rightarrow A$ zu konstruieren. So war es leicht, die Gleichmächtigkeit $P(R) \leftrightarrow R^R$ bzw. $P(N) \leftrightarrow N^N$ nachzuweisen (s.o.).

Allgemein gilt sogar: Wenn $X x Y \leftrightarrow X$, dann auch $P(X) x P(Y) \leftrightarrow P(X)$, denn dann gilt die Inklusionskette $P(X) \rightarrow P(X) x P(Y) \rightarrow P(X x Y) \leftrightarrow P(X)$.

Konsequenz: Wegen $N x N \leftrightarrow N$ (Cantor) gilt auch für $R \leftrightarrow P(N)$, dass auch $R x R \leftrightarrow R$ gelten muss. (Beweis: Übungsaufgabe) Und weiterhin gilt für alle nicht-endlichen Kardinalitäten $X x X \leftrightarrow X$, denn aus $P(R) x P(R) \leftrightarrow P(R)$ folgt auch $P(P(R)) x P(P(R)) \leftrightarrow P(P(R))$, usw.

Hingegen ist die Frage, ob es *zwischen* der Kardinalität von N und der von P(N) (welche zu R gleichmächtig ist) *andere* Kardinalitäten gibt, mit den Axiomen der Mengenlehre nicht beantwortbar. Die so genannte „Kontinuumshypothese”, dass es keine Kardinalität zwischen N und R (bzw. P(N)) gibt, ist weder beweisbar, noch widerlegbar. Die Kontinuumshypothese ist vom mengentheoretischen Axiomensystem unabhängig und kann als eigenständiges Axiom widerspruchsfrei hinzugefügt oder weggelassen werden. Ich finde die Annahme der Kontinuumshypothese mental einfacher zu verdauen als ihr Gegenteil, weil man sich sonst (vergeblich) eine Menge vorstellen müsste, die größer als N, aber kleiner als P(N) ist.

Vieles ist gleich groß, was man für verschieden groß hält, so etwa N, Z, Q und die algebraischen Zahlen, sowie „eine Liga höher” P(N), die transzendenten Zahlen, R, R^2, R^3, R^4, … und alle Intervalle, Flächen, Raumkörper usw. Durch Vereinigungen und Produkte bleibt man in der gleichen Größenordnung. Größensprünge werden dagegen durch Potenzmengen gebildet.

Jedenfalls wissen wir nun, dass wir Kinder Recht hatten, als wir Dirk Braunes „Herr der Höchste” erst durch ein „unendlich mal der Höchste”, und schließlich durch ein „unendlich hoch unendlich mal der Höchste” übertrumpfen wollten. „Unendlich hoch unendlich” entspricht P(N) (entsprechend R), und das ist eben mehr als N; und $P(P(N))$ (entsprechend R^R) ist eben mehr als P(N) (entsprechend R).

Literatur

Als ein sehr schön lesbares Mathematikbuch, das diese Fragen (und andere) behandelt, empfehle ich

Lilly Görke: Mengen, Relationen, Funktionen. Verlag Harry Deutsch, Frankfurt/M. und Zürich. 4. stark bearbeitete Auflage 1974, 392 Seiten. (Ursprünglich Volk und Wissen Volkseigener Verlag, DDR, Berlin). Darin vor allem Kap. 6, Vergleich unendlicher und endlicher Mengen, S. 264-310.

Der Satz, dass zwei Mengen, die jeweils echte Teilmengen voneinander sind, gleichmächtig sind, wird dort auf S. 287, als „Bernsteinscher Äquivalenzsatz” zitiert. Für den Beweis verweist Görke auf

D. Klaua: Allgemeine Mengenlehre, Band I. Akademie-Verlag Berlin (DDR) 1970, S.297 ff, und auf *P.S. Alexandrow*: Einführung in die Mengenlehre und in die Theorie der reellen Funktionen, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (DDR), 1956, S. 16.

Und schließlich weise ich gerne auf eines meiner Lieblingsbücher hin, das sich nicht so sehr mit der abstrakten (bildlich gesprochen, etwas fleischlosen) Mengenlehre beschäftigt, sondern vielmehr mit den inhaltlichen Strukturen der Zahlenmengen und ihrer Funktionen. Es dringt auf wunderbar klare und einfühlsame Weise tief in das Wesen der Mathematik ein und ist ein Lesevergnügen, das sich sogar für den Nachttisch eignet:

Richard Courant: Was ist Mathematik. Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York u.s.w., 4. Auflage 1992, 399 Seiten. Ursprünglich: What is Mathematics, Oxford University Press, New York 19941 in neun Auflagen.

Darin steht übrigens als hübsche Anekdote zur Titelwahl des Buches „What is Mathematics" die Entscheidung von Thomas Mann für den englischen Titel von „Lotte in Weimar" als „The Beloved Returns": die Aussicht auf besseren Verkauf. Ich finde sogar: das Buch ist noch schöner als der Titel. Ich werde meine Vision, eines Tages ein Buch unter dem Titel „Was ist Informatik" zu schreiben, sicherlich nicht verwirklichen, da ich einen Vergleich mit Richard Courant niemals bestehen würde.